

TD 15 : Dérivation

Taux d'accroissement et dérivée

1 ★ On pose $f : x \mapsto |x|^{3/2}$.

- 1) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en 0, et calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.
- 2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si c'est le cas, préciser $f'(0)$.
- 3) Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f : x \mapsto |x|^{1/2}$.
- 4) Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor \times |x|$.

2 ★★ Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \sin x}{x^2}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3 + x) - \ln 3}{\ln(2 + x) - \ln 2}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$

3 ★★ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\cos x - 1}$$

Calculer les limites à gauche et à droite de f en 0. En déduire que f n'admet pas de limite en 0.

4 ★★★ Étudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Les grands théorèmes de la dérivation

5 ★★ Soit $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

6 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui s'annule en n points (distincts). Montrer que f' s'annule en au moins $n - 1$ points.

7 ★★ En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{101} \approx 10 \quad \frac{1}{0,99^2} \approx 1 \quad \cos 1 \approx \frac{1}{2}$$

Par exemple, pour la première approximation, il faut majorer $|\sqrt{101} - 10|$.

8 ★★ Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Soit enfin $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour tout $x \in I$, on pose

$$g(x) = \frac{f(a) + f(x)}{2} - \left(f\left(\frac{a+x}{2}\right) + (x-a)^2 A \right)$$

avec A une constante réelle.

- 1) Déterminer une valeur A telle que $g(a) = g(b) = 0$. Cette valeur de A sera fixée comme tel dans la suite.
- 2) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
- 3) En appliquant l'égalité des accroissements finis à f' entre deux points bien choisis, en déduire qu'il existe $d \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(d)$$

9 ★★★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. En considérant la fonction $g = f \circ \tan$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

10 ★★★ En appliquant le théorème des accroissements finis, déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right]$$

Dérivabilité revisitée

11 ★ On pose

$$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$$

- 1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement. Préciser la valeur de $f(0)$.
- 2) Montrer que la fonction f ainsi prolongée est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- 3) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$. Est-ce que f est de classe \mathcal{C}^1 ?
- 4) Est-ce une contradiction avec le théorème de la limite de la dérivée ?

12 ★★ Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \arccos \sqrt{1 - x^2}$.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in] -1, 1[\setminus \{0\}$.
- 2) Étudier la dérivabilité de f en -1 , en 1 puis en 0 .

13 ★★ Prolonger les fonctions suivantes par continuité en 0. Puis étudier leur dérivabilité en 0.

$$f(x) = x \ln |x|$$

$$h(x) = e^{-1/x^2}$$

$$g(x) = x^x$$

$$\varphi(x) = \frac{\sin |x|}{|x|}$$

14 ★★ Soit $f : x \mapsto \operatorname{ch} \sqrt{x}$ une fonction définie sur \mathbb{R}_+ .

- 1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .
- 2) Est-ce que f est de classe \mathcal{C}^2 ?

Dérivées n -ièmes

15 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n -ièmes des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$\bullet f_1(x) = (x^2 + 4x)e^{3x}$$

$$\bullet f_4(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\bullet f_2(x) = \frac{1}{1 - 2x}$$

$$\bullet f_3(x) = x^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet f_5(x) = \sin^3 x$$

Pour f_4 et f_5 , on pourra d'abord réécrire ces expressions comme si on voulait les intégrer.

16 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^{2n}$.

- 1) Calculer de deux façons la dérivée n -ième de f . On pourra utiliser le fait que $x^{2n} = x^n \times x^n$.
- 2) En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

17 ★★★ Soit $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$.

- 1) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ (sur \mathbb{R}^*).
- 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

- 3) En déduire que f se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

18 ★★★ Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa classe, c'est-à-dire la plus grande valeur de $k \in \mathbb{N}$ pour laquelle la fonction est de classe \mathcal{C}^k .

$$f(x) = x|x| \quad g(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (\text{avec } n \in \mathbb{N})$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

19 ★★★ Soit P une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions. *Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 6.*